

Autour du nombre e

Ce qu'on peut tirer de l'inégalité $e^x \geq 1 + x$

Michel Hua

Octobre 2026

Résumé

Une feuille de problèmes de terminale sur l'exponentielle pose trois questions qui semblent sans rapport. Quelle est la taille de $n!$? Pourquoi la moyenne géométrique de nombres positifs est-elle plus petite que leur moyenne arithmétique ? Comment calculer e , et est-ce une fraction ? On montre que les trois réponses reposent sur une seule inégalité, $e^x \geq 1 + x$, qui dit que le graphe de l'exponentielle est au-dessus de sa tangente en 0. On pousse ensuite chaque réponse aussi loin que possible : jusqu'à la formule de Stirling avec un reste explicite, jusqu'à la famille des moyennes d'ordre p , et jusqu'à l'irrationalité de e et un développement asymptotique de $n!e$ modulo 1.

Leçons concernées. 224 (Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions), 223 (Suites numériques), 229 (Fonctions monotones, fonctions convexes), 218 (Formules de Taylor), 230 (Séries numériques).

Développements possibles. Formule de Stirling avec reste (théorème 2.7) ; monotonie des moyennes d'ordre p (théorème 3.6) ; reste de la série de e et irrationalité de e (proposition 4.3 et théorème 4.5). Le fichier `AutourDeE.lean` vérifie avec Mathlib le lemme 1.1, le lemme 2.1, la proposition 2.2, le corollaire 2.4, le lemme 2.5, le théorème 2.7 (avec le reste θ_n), le théorème 3.2 (sauf le cas d'égalité de $h \leq g$), l'exemple 3.1, le théorème 3.6 pour $0 < p \leq q$, les propositions 4.1 et 4.3 (sans la formule intégrale) et le théorème 4.5.

Prérequis. Les fonctions $\ln$ et $\exp$ et leurs propriétés usuelles, avec $e = \exp(1)$; suites adjacentes ; convexité ; séries entières (pour un seul calcul, au lemme 2.5). On note $u_n \sim v_n$ l'équivalence de suites et $O(\cdot)$ la domination usuelle.

Table des matières

1	Une inégalité, trois questions	2
2	Quelle est la taille de $n!$?	2
2.1	Un premier encadrement	2
2.2	La formule de Stirling	3
3	Pourquoi la moyenne géométrique est-elle plus petite ?	5
3.1	Moyennes d'ordre p	7
4	Comment calculer e, et est-ce une fraction ?	7
4.1	Deux suites adjacentes	8
4.2	La limite est e	8
4.3	e n'est pas une fraction	9

5	Retour à la question de départ	10
6	Exercices	10
7	Corrigés	10

1 Une inégalité, trois questions

Tout part de l'inégalité suivante.

Lemme 1.1 (Inégalité de la tangente). *Pour tout réel x , $e^x \geq 1+x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$. De façon équivalente, pour tout $y > 0$, $\ln y \leq y - 1$, avec égalité si et seulement si $y = 1$.*

Démonstration. La fonction $\varphi(x) = e^x - 1 - x$ a pour dérivée $e^x - 1$. Elle décroît donc sur $]-\infty, 0]$ et croît sur $[0, +\infty[$. Son minimum est atteint seulement en 0, où elle vaut 0. Pour la seconde forme, on pose $y = e^x$, c'est-à-dire $x = \ln y$. $\square$

Géométriquement, la droite $y = 1 + x$ est la tangente en 0 au graphe de $\exp$, et ce graphe est au-dessus de ses tangentes parce que $\exp$ est convexe. Symétriquement, $y - 1$ est la tangente en 1 à $\ln$, qui est concave.

Voici comment cette inégalité intervient dans les trois parties de la feuille.

- *Factorielles* (section 2). Avec $x = \frac{1}{n}$, elle donne $1 + \frac{1}{n} \leq e^{1/n}$, donc $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$. Ce quotient est exactement le rapport de deux termes consécutifs de la suite $n^n/n!$.
- *Moyennes* (section 3). Sous la forme $\ln y \leq y - 1$, appliquée à $y = a_i/m$, elle donne l'inégalité arithmético-géométrique.
- *Le nombre e* (section 4). C'est le cas $n = 1$ des inégalités $e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ pour $x \geq 0$. En les rendant précises, on calcule e et on montre qu'il est irrationnel.

On reviendra à ce fil conducteur à la section 5.

2 Quelle est la taille de $n!$?

Le nombre $n!$ croît très vite : $10! = 3\,628\,800$ et $20! \approx 2,4 \cdot 10^{18}$. On cherche à le comparer à des fonctions plus simples. On le fait en deux temps : un encadrement grossier, qui découle directement de la feuille, puis l'équivalent exact.

2.1 Un premier encadrement

L'idée de la feuille est de comparer $n!$ à n^n . Le quotient $u_n = n^n/n!$ est plus simple à étudier qu'on ne le croit, car le rapport de deux termes consécutifs se simplifie. On commence par encadrer ce rapport.

Lemme 2.1. *Pour tout $n \geq 1$, on a $2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n < e$.*

Démonstration. Minoration. Par la formule du binôme, $(1 + \frac{1}{n})^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$. C'est l'inégalité de Bernoulli $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (exercice 1).

Majoration. Le lemme 1.1 avec $x = \frac{1}{n} \neq 0$ donne $1 + \frac{1}{n} < e^{1/n}$. On élève à la puissance n . $\square$

Proposition 2.2. *Soit $u_n = \frac{n^n}{n!}$ pour $n \geq 1$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (1 + \frac{1}{n})^n$, la suite (u_n) est strictement croissante et, pour tout $n \geq 1$,*

$$2^{n-1} \leq u_n \leq e^{n-1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

De plus $n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$ pour tout $n \geq 6$.

L'idée est d'écrire u_n comme un produit télescopique de rapports, et d'encadrer chaque rapport par le lemme 2.1.

Démonstration. Le calcul du rapport est direct :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Par le lemme 2.1, ce rapport est dans $[2, e[$. Il est > 1 , donc (u_n) est strictement croissante. Comme $u_1 = 1$, on a

$$u_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k},$$

produit de $n-1$ facteurs compris entre 2 et e . D'où $2^{n-1} \leq u_n \leq e^{n-1}$. On remplace u_n par $n^n/n!$ et on isole $n!$.

Pour la dernière assertion, on part de $u_6 = \frac{46656}{720} = 64,8 \geq 2^6$. Ensuite $u_{n+1} \geq 2u_n$, donc $u_n \geq 2^n$ pour tout $n \geq 6$ par récurrence, ce qui s'écrit $n! \leq (n/2)^n$. $\square$

Remarque 2.3. 1. Le seuil 6 est le bon : pour $n = 5$, $u_5 = \frac{3125}{120} \approx 26,04 < 32$, donc $5! > (5/2)^5$.

2. La minoration $n! \geq (n/e)^n$, un peu plus faible que celle de la proposition, s'obtient en une ligne. La série de e^n a tous ses termes positifs, donc elle dépasse chacun d'eux : $e^n = \sum_{k \geq 0} \frac{n^k}{k!} \geq \frac{n^n}{n!}$.

La feuille demandait ensuite la limite de $n!/a^n$. L'encadrement suffit à y répondre : la factorielle bat toute suite géométrique.

Corollaire 2.4. Pour tout réel $a > 0$, $\frac{n!}{a^n} \rightarrow +\infty$; autrement dit $a^n = o(n!)$.

Démonstration. Par la proposition 2.2,

$$\frac{n!}{a^n} \geq e \left(\frac{n}{ea} \right)^n.$$

Dès que $n \geq 2ea$, le nombre $\frac{n}{ea}$ est au moins 2, donc le minorant est au moins $e2^n$, qui tend vers $+\infty$. $\square$

2.2 La formule de Stirling

L'encadrement de la proposition 2.2 donne le bon ordre de grandeur du logarithme, $\ln n! = n \ln n + O(n)$. Mais entre le minorant et le majorant, il reste un facteur de l'ordre de $(e/2)^n$, qui est énorme. Pour faire mieux, on cherche un équivalent de $n!$.

D'où vient la forme de la réponse ? La minoration $n! \geq e(n/e)^n$ suggère de comparer $n!$ à $(n/e)^n$. On va voir qu'il faut encore un facteur $\sqrt{n}$. On étudie donc le logarithme du quotient :

$$w_n = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n, \quad n \geq 1.$$

Le plan est simple : montrer que (w_n) converge, en contrôlant ses accroissements, puis identifier sa limite.

Lemme 2.5. Pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} \leq w_n - w_{n+1} \leq \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

En particulier $w_n - w_{n+1} = \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

L'idée de la preuve : l'accroissement $w_n - w_{n+1}$ s'exprime avec $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Un changement de variable bien choisi en fait une série entière à termes positifs, que l'on encadre par son premier terme et par une série géométrique.

Démonstration. On calcule d'abord l'accroissement. Comme $\ln(n+1)! = \ln n! + \ln(n+1)$,

$$w_n - w_{n+1} = -\ln(n+1) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+1) - 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

Posons $t = \frac{1}{2n+1} \in]0, 1[$. Alors $\frac{1+t}{1-t} = \frac{2n+2}{2n} = 1 + \frac{1}{n}$ et $n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2t}$. Le développement en série entière

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = \ln(1+t) - \ln(1-t) = 2 \sum_{k \geq 0} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}, \quad |t| < 1,$$

donne

$$w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2t} \ln \frac{1+t}{1-t} - 1 = \sum_{k \geq 1} \frac{t^{2k}}{2k+1}.$$

Tous les termes sont positifs. La somme est donc minorée par son premier terme $\frac{t^2}{3}$. Elle est majorée par $\frac{1}{3} \sum_{k \geq 1} t^{2k} = \frac{t^2}{3(1-t^2)}$, puisque $2k+1 \geq 3$. Enfin

$$\frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{4n(n+1)},$$

d'où l'encadrement. Les deux bornes valent $\frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. □

Le lemme montre que (w_n) décroît, mais pas trop vite. Elle a donc une limite ℓ ; il reste à la calculer. Pour cela, on utilise une autre suite dont on connaît l'équivalent : les intégrales de Wallis. Elles sont étudiées en détail dans la fiche `lecons/236-calcul-integrales/calcul-integral.tex` ; on rappelle l'énoncé et une preuve courte.

Lemme 2.6 (Wallis). Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$. Alors $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, et

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{donc} \quad \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi p}}.$$

Démonstration. Une intégration par parties, en écrivant $\sin^{n+2} = \sin^{n+1} \cdot \sin$, donne $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$. Avec $W_0 = \frac{\pi}{2}$, on en déduit la formule pour W_{2p} . Avec $W_1 = 1$, on voit que la suite $(n+1)W_{n+1}W_n$ est constante, égale à $W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$.

Comme $0 \leq \sin t \leq 1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, la suite (W_n) est décroissante et strictement positive. Donc

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1,$$

d'où $W_{n+1} \sim W_n$. Alors $\frac{\pi}{2} = (n+1)W_{n+1}W_n \sim (n+1)W_n^2$, soit $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$. Enfin $\frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} = \frac{2}{\pi} W_{2p} \sim \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{4p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi p}}$. □

On peut maintenant énoncer le résultat principal de la section.

Théorème 2.7 (Stirling). On a $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Plus précisément, pour tout $n \geq 1$, il existe $\theta_n \in]0, 1]$ tel que

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta_n/(12n)}.$$

La preuve a deux étapes. On montre d'abord que w_n converge, avec un reste contrôlé, grâce au lemme 2.5. On identifie ensuite la constante en écrivant de deux façons l'équivalent de $\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2}$.

Démonstration. Convergence. Par le lemme 2.5, la suite (w_n) est strictement décroissante. La majoration du lemme s'écrit

$$\left(w_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}\right) - \left(w_n - \frac{1}{12n}\right) \geq 0,$$

donc la suite $(w_n - \frac{1}{12n})$ est croissante. Les deux suites diffèrent de $\frac{1}{12n} \rightarrow 0$: elles sont adjacentes et convergent vers une même limite ℓ . En sommant l'encadrement du lemme 2.5 de $k = n$ à $+\infty$, on obtient $0 < w_n - \ell \leq \frac{1}{12n}$. En posant $\theta_n = 12n(w_n - \ell) \in]0, 1]$, on a donc

$$n! = e^\ell \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta_n/(12n)}.$$

Identification de la constante. Posons $C = e^\ell$, de sorte que $n! \sim C\sqrt{n}(n/e)^n$. On applique cet équivalent à $(2p)!$ et à $p!$:

$$\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2} \sim \frac{C\sqrt{2p}(2p/e)^{2p}}{4^p C^2 p^2 (p/e)^{2p}} = \frac{\sqrt{2}}{C\sqrt{p}}.$$

Les puissances se simplifient, car $(2p)^{2p} = 4^p p^{2p}$. La comparaison avec le lemme 2.6 donne $\frac{\sqrt{2}}{C} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, soit $C = \sqrt{2\pi}$. $\square$

Remarque 2.8. 1. *Comparaison avec l'encadrement de départ.* La décroissance de (w_n) donne $\ell \leq w_n \leq w_1 = 1$, c'est-à-dire

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

L'incertitude n'est plus un facteur exponentiel $(e/2)^n$, mais une constante $e/\sqrt{2\pi} \approx 1,08$.

2. *Vers un développement asymptotique.* Le lemme 2.5 montre que $w_n - \ell = \sum_{k \geq n} (w_k - w_{k+1}) = \frac{1}{12n} + O(\frac{1}{n^2})$. On obtient ainsi le début du développement

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En poussant le calcul, on obtient la série de Stirling. Ses coefficients s'expriment à l'aide des nombres de Bernoulli, et elle diverge pour tout n : c'est un développement asymptotique, pas une série convergente.

3. *Un test numérique.* Pour $n = 10$, $10! = 3\,628\,800$ et $\sqrt{20\pi} (10/e)^{10} \approx 3\,598\,696$. L'erreur relative est d'environ 0,83 %, très proche de $\frac{1}{120} = \frac{1}{12n}$, comme le prévoit le théorème.

3 Pourquoi la moyenne géométrique est-elle plus petite ?

Soit $n \geq 2$ et $a = (a_1, \dots, a_n)$ des réels *strictement positifs*. On note

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad g = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}, \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$$

leurs moyennes arithmétique, géométrique et harmonique. Commençons par l'exemple de la feuille.

Exemple 3.1 (Exercice 2 de la feuille). Pour $(a_1, a_2, a_3) = (4, 10, 25)$, on trouve :

- $m = \frac{4+10+25}{3} = \frac{39}{3} = 13$;
- $g = \sqrt[3]{4 \cdot 10 \cdot 25} = \sqrt[3]{1000} = 10$;
- $\frac{1}{h} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{25} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{25+10+4}{100} = \frac{13}{100}$, donc $h = \frac{100}{13} \approx 7,69$.

On constate que $h < g < m$, et de plus que $mh = 100 = g^2$.

Cette dernière égalité n'est pas un hasard : 4, 10, 25 est une progression géométrique, de raison $\frac{5}{2}$. Pour (a, ar, ar^2) avec $a, r > 0$, on a $g = ar$, $m = \frac{a(1+r+r^2)}{3}$ et $\frac{1}{h} = \frac{1+r+r^2}{3ar^2}$, donc $mh = a^2r^2 = g^2$. Pour deux nombres, l'identité $mh = g^2$ est toujours vraie, car $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab$. En revanche, elle est fautive en général pour trois nombres : pour $(1, 1, 4)$, on a $m = 2$, $g = \sqrt[3]{4}$ et $h = \frac{4}{3}$, donc $mh = \frac{8}{3}$, alors que $g^2 = \sqrt[3]{16} \approx 2,52$.

L'ordre $h < g < m$ observé est général. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.2. *On a $h \leq g \leq m$. Chacune de ces deux inégalités est une égalité si et seulement si $a_1 = \dots = a_n$.*

L'idée est de ramener une inégalité sur un *produit* (la moyenne géométrique) à une inégalité sur une *somme*, en prenant le logarithme. Le lemme 1.1 compare alors chaque $\ln a_i$ à une expression affine en a_i , et la somme des termes affines se calcule.

Première preuve (méthode de la feuille). On applique le lemme 1.1, sous la forme $\ln y \leq y - 1$, à $y = a_i/m$, et on somme sur i :

$$n \ln \frac{g}{m} = \sum_{i=1}^n \ln \frac{a_i}{m} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{m} - 1 \right) = \frac{nm}{m} - n = 0.$$

Donc $g \leq m$. Il y a égalité si et seulement si chacune des n inégalités est une égalité, c'est-à-dire si $a_i/m = 1$ pour tout i .

Pour h , on applique ce résultat aux réels $1/a_i$. Leur moyenne géométrique vaut $1/g$ et leur moyenne arithmétique vaut $1/h$. On obtient $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$, soit $h \leq g$, avec le même cas d'égalité. $\square$

Seconde preuve (convexité). La fonction $\ln$ est strictement concave sur $]0, +\infty[$, car $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$. L'inégalité de Jensen donne

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right),$$

c'est-à-dire $\ln g \leq \ln m$. La stricte concavité donne le cas d'égalité. On conclut pour h comme ci-dessus. $\square$

Remarque 3.3 (Pourquoi les deux preuves sont la même). La droite $y \mapsto y - 1$ est la tangente au graphe de $\ln$ au point 1. Appliquer $\ln y \leq y - 1$ à $y = a_i/m$ revient à comparer $\ln$ à sa tangente au point m , c'est-à-dire au barycentre des a_i . C'est exactement la preuve « par la tangente » de l'inégalité de Jensen, qui vaut pour toute fonction concave dérivable. La première preuve n'est donc pas une astuce : c'est Jensen, écrit à la main.

Voici une application qui relie cette section à la précédente.

Exemple 3.4. La suite $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est strictement croissante. L'idée est de voir e_n comme un produit de $n+1$ facteurs, dont on compare la moyenne géométrique à la moyenne arithmétique. On applique $g < m$ aux $n+1$ réels $1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, 1$, qui ne sont pas tous égaux. Leur produit vaut e_n et leur somme $n+2$, donc

$$e_n^{1/(n+1)} < \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

c'est-à-dire $e_n < e_{n+1}$. Avec le lemme 2.1, on retrouve que (e_n) converge en croissant vers une limite $\leq e$. Cette limite vaut e , puisque $n \ln(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow 1$.

3.1 Moyennes d'ordre p

Les trois moyennes h, g, m ne sont pas isolées : ce sont trois points d'une famille continue de moyennes, indexée par un réel p . L'inégalité $h \leq g \leq m$ dit alors simplement que cette famille est croissante en p .

Définition 3.5. Pour $p \in \mathbb{R}^*$, on pose $M_p(a) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p}$, et $M_0(a) = g$.

Ainsi $M_1 = m$ et $M_{-1} = h$, et M_2 est la moyenne quadratique. On a aussi $M_{-p}(a) = 1/M_p(1/a)$, où $1/a = (1/a_1, \dots, 1/a_n)$. Cette symétrie permettra de traiter les p négatifs à partir des p positifs.

Théorème 3.6. L'application $p \mapsto M_p(a)$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante si les a_i ne sont pas tous égaux, et constante sinon. De plus $M_p(a) \rightarrow \max a_i$ quand $p \rightarrow +\infty$ et $M_p(a) \rightarrow \min a_i$ quand $p \rightarrow -\infty$.

L'idée est la suivante. Pour $0 < p < q$, l'inégalité $M_p \leq M_q$ est l'inégalité de Jensen pour la fonction convexe $x \mapsto x^{q/p}$. Les p négatifs s'en déduisent par la symétrie $a \mapsto 1/a$, et le passage par $p = 0$ est l'inégalité arithmético-géométrique.

Démonstration. Si les a_i sont tous égaux à c , alors $M_p(a) = c$ pour tout p . Supposons-les non tous égaux.

Cas $0 < p < q$. La fonction $x \mapsto x^{q/p}$ est strictement convexe sur $]0, +\infty[$, puisque $q/p > 1$. On applique Jensen aux réels $b_i = a_i^p$, qui ne sont pas tous égaux :

$$M_p(a)^q = \left(\frac{1}{n} \sum b_i \right)^{q/p} < \frac{1}{n} \sum b_i^{q/p} = M_q(a)^q,$$

et on prend la racine q -ième.

Cas $p < q < 0$. On a $0 < -q < -p$. Le cas précédent, appliqué à $1/a$, donne $M_{-q}(1/a) < M_{-p}(1/a)$. En passant aux inverses, $M_p(a) < M_q(a)$.

Cas où p ou q est nul. Pour $q > 0$, le théorème 3.2 appliqué aux a_i^q donne $g^q < M_q(a)^q$, soit $M_0 < M_q$. Pour $p < 0$, il donne de même $g^p < M_p(a)^p$. Comme $x \mapsto x^{1/p}$ est décroissante, on en déduit $M_p(a) < g = M_0(a)$. Le cas $p < 0 < q$ s'en déduit par transitivité.

Continuité en 0. Pour $p \rightarrow 0$, on a $a_i^p = e^{p \ln a_i} = 1 + p \ln a_i + O(p^2)$. Donc

$$\ln M_p(a) = \frac{1}{p} \ln \left(1 + \frac{p}{n} \sum_i \ln a_i + O(p^2) \right) = \frac{1}{n} \sum_i \ln a_i + O(p) \longrightarrow \ln g.$$

Ailleurs, la continuité est claire.

Limites. Soit $A = \max a_i$. Pour $p > 0$, la somme $\sum a_i^p$ est comprise entre A^p et nA^p , donc $n^{-1/p} A \leq M_p(a) \leq A$, et $n^{-1/p} \rightarrow 1$. On en déduit le cas $p \rightarrow -\infty$ par $M_{-p}(a) = 1/M_p(1/a)$. $\square$

Remarque 3.7. En particulier $\min a_i \leq h \leq g \leq m \leq M_2 \leq \max a_i$. Sur l'exemple 3.1, $M_2 = \sqrt{\frac{16+100+625}{3}} = \sqrt{247} \approx 15,7$, qui est bien entre $m = 13$ et $\max a_i = 25$.

4 Comment calculer e , et est-ce une fraction ?

Le lemme 1.1 dit que $e^x \geq 1 + x$. On peut faire mieux : pour $x \geq 0$, l'exponentielle dépasse chacune de ses sommes de Taylor. En $x = 1$, cela donne une suite croissante qui minore e . La feuille lui associe une suite décroissante qui le majore. On va voir que ces deux suites permettent de calculer e très vite, puis de montrer qu'il n'est pas rationnel.

4.1 Deux suites adjacentes

Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Dans cette section, u_n ne désigne plus la suite de la section 2. Le terme correctif $\frac{1}{n \cdot n!}$ n'est pas arbitraire : c'est la somme de la série géométrique $\frac{1}{(n+1)!} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n}$, qui majore les termes oubliés $\sum_{k > n} \frac{1}{k!}$.

Proposition 4.1. *Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes : (u_n) est strictement croissante, (v_n) est strictement décroissante et $v_n - u_n \rightarrow 0$. Leur limite commune ℓ vérifie donc $u_n < \ell < v_n$ pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. La suite (u_n) croît strictement, car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. L'écart $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!}$ tend vers 0. Pour (v_n) , on réduit au même dénominateur :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0.$$

Les inégalités strictes $u_n < \ell < v_n$ viennent de la stricte monotonie : $u_n < u_{n+1} \leq \ell$ et $\ell \leq v_{n+1} < v_n$. $\square$

Exemple 4.2 (Exercice 3 de la feuille). On a $u_1 = 2$, $v_1 = 3$, $u_2 = \frac{5}{2}$, $v_2 = \frac{11}{4}$, $u_3 = \frac{8}{3}$ et $v_3 = \frac{49}{18}$. Pour un encadrement d'amplitude 10^{-3} , il faut $\frac{1}{n \cdot n!} \leq 10^{-3}$. L'amplitude vaut $\frac{1}{600}$ pour $n = 5$, ce qui ne suffit pas, et $\frac{1}{4320} < 10^{-3}$ pour $n = 6$. Avec $u_6 = \frac{1957}{720} \approx 2,71806$ et $v_6 = \frac{11743}{4320} \approx 2,71829$, on obtient

$$2,718 < \ell < 2,7183.$$

On conjecture que $\ell = e$.

4.2 La limite est e

Pour démontrer la conjecture, on calcule exactement l'écart $e - u_n$. L'idée de la feuille est d'étudier la fonction $f(x) = \left(\sum_{k \leq n} \frac{x^k}{k!}\right)e^{-x}$: sa dérivée est très simple, car les termes de la somme se compensent deux à deux.

Proposition 4.3. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$e - u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{(n+1)!} < e - u_n < \frac{e}{(n+1)!}.$$

En particulier $u_n \rightarrow e$, donc $\ell = e$, et $e = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$.

Démonstration. C'est la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à $\exp$ entre 0 et 1 à l'ordre n . Pour rester au niveau de la feuille, on la retrouve ainsi. Soit

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right)e^{-x}, \quad x \in [0, 1].$$

Elle est dérivable, et

$$f'(x) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right)e^{-x} = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

En effet, la première somme vaut $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$, et il ne reste que le dernier terme de la seconde. Comme $f(0) = 1$ et $f(1) = u_n e^{-1}$, on intègre f' de 0 à 1 :

$$u_n e^{-1} - 1 = -\frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \quad \text{soit} \quad e - u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

Le changement de variable $t = 1 - x$ donne la formule.

Pour l'encadrement, on a $1 < e^t < e$ pour $t \in]0, 1[$, et $\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$. Les inégalités sont strictes, car l'intégrande est continue et les inégalités sont strictes sur $]0, 1[$. Le majorant $\frac{e}{(n+1)!}$ tend vers 0. $\square$

Remarque 4.4. 1. La proposition 4.1 donne un majorant plus fin : $e - u_n < \frac{1}{n \cdot n!}$. En comparant avec le minorant $\frac{1}{(n+1)!}$, on obtient $e - u_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$: l'erreur commise est essentiellement le premier terme oublié. L'exercice 6 précise ce point.

2. *La convergence est très rapide.* Pour obtenir d décimales, il suffit que $e/(n+1)! \leq 10^{-d}$. Par Stirling, le plus petit tel n vérifie $n \ln n \sim d \ln 10$. Par exemple, $n = 17$ suffit pour 15 décimales, car $e/18! \approx 4,2 \cdot 10^{-16}$. Comparer avec $(1 + \frac{1}{n})^n$, dont l'erreur est de l'ordre de $\frac{e}{2n}$ (exercice 3).

3. La même méthode, en $x = -1$, donne la série alternée

$$\frac{1}{e} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

C'est le développement de Pierce de $1/e$, de chiffres $q_i = i + 1$. Il ne s'arrête pas, ce qui redonne l'irrationalité de e (voir la fiche `lecons/142-pgcd-ppcm/divisibilite-pgcd-congruences.tex`).

4.3 e n'est pas une fraction

On revient à la dernière question de la feuille. L'idée est de comparer deux précisions. Si e était une fraction p/q , alors $q!e$ serait un entier. Mais $q!u_q$ est aussi un entier, et l'écart $q!(e - u_q)$ est strictement compris entre 0 et 1, par la proposition 4.1. Un entier ne peut pas être dans $]0, 1[$.

Théorème 4.5. *Le nombre e est irrationnel.*

Démonstration. Supposons $e = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers, $q \geq 1$. Par la proposition 4.1, et puisque $\ell = e$,

$$u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q \cdot q!}.$$

On multiplie par $q \cdot q! > 0$:

$$0 < p \cdot q! - q \cdot q! u_q < 1.$$

Or $q!u_q = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$ est un entier, car $k!$ divise $q!$ pour $k \leq q$. Donc $p \cdot q! - q \cdot q! u_q$ est un entier strictement compris entre 0 et 1. C'est absurde. $\square$

Remarque 4.6. 1. *Pourquoi ça marche.* Les rationnels u_q ont un dénominateur qui divise $q!$, et ils approchent e à moins de $\frac{1}{q \cdot q!}$. Une fraction fixe p/q ne peut pas être approchée aussi bien par des fractions de dénominateur $q!$: l'écart entre deux telles fractions distinctes est au moins $\frac{1}{q!}$. C'est le même principe que dans toutes les preuves d'irrationalité par approximation.

2. La même idée, appliquée simultanément aux séries de e et de e^{-1} , montre que e^2 est irrationnel, et même non quadratique (Liouville, 1840). Si $e^2 = \frac{p}{q}$, on écrit $qe = pe^{-1}$ et l'on compare les deux développements. Hermite a démontré en 1873 que e est transcendant. On ne démontre pas ces résultats ici.

5 Retour à la question de départ

On s'était demandé ce que l'on pouvait tirer de la seule inégalité $e^x \geq 1 + x$. Le bilan est le suivant.

- *Taille de $n!$* . Appliquée en $x = \frac{1}{n}$, elle encadre le rapport u_{n+1}/u_n et donne $e(n/e)^n \leq n!$. Le facteur $(n/e)^n$ est le bon : la formule de Stirling ne fait qu'ajouter le facteur $\sqrt{2\pi n}$.
- *Moyennes*. Appliquée sous la forme $\ln y \leq y - 1$, elle donne $g \leq m$. C'est un cas de l'inégalité de Jensen : la tangente à une fonction concave est au-dessus de son graphe.
- *Le nombre e* . C'est le premier cas des inégalités $e^x \geq \sum_{k \leq n} \frac{x^k}{k!}$. Rendues précises par la formule de Taylor, elles donnent une approximation de e si bonne que e ne peut pas être rationnel.

Dans les trois cas, le mécanisme est la convexité de l'exponentielle, utilisée de plus en plus finement.

6 Exercices

Exercice 1. Montrer que $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout $x \geq -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Que donne la proposition 2.2 pour $\ln n!$?

Exercice 2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n}$, puis donner un équivalent de $\binom{2n}{n}$.

Exercice 3. Montrer que $(1 + \frac{1}{n})^n = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ et $g(x) = f(x) + \frac{x}{n!}$, où f est la fonction de la preuve de la proposition 4.3. Montrer que g est croissante sur $[0, 1]$ et en déduire $e - \frac{e}{n!} \leq u_n \leq e$.

Exercice 5. Soit $x, y > 0$ distincts. Montrer que la moyenne logarithmique $\frac{x-y}{\ln x - \ln y}$ s'intercale entre les moyennes géométrique et arithmétique : $\sqrt{xy} < \frac{x-y}{\ln x - \ln y} < \frac{x+y}{2}$.

Exercice 6. On pose $r_n = n!(e - u_n)$. Montrer que $r_n = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, puis que $\sin(2\pi n!e) \sim \frac{2\pi}{n}$. En déduire la nature de la série $\sum \sin(2\pi n!e)$.

7 Corrigés

Exercice 1. On raisonne par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est clair. Si $(1+x)^n \geq 1+nx$, alors, comme $1+x \geq 0$,

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

L'hypothèse $x \geq -1$ sert à multiplier l'inégalité par $1+x$ sans en changer le sens. Les encadrements de la proposition 2.2 donnent, en prenant le logarithme,

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln n! \leq n \ln n - (n-1) \ln 2,$$

donc $\ln n! = n \ln n + O(n)$ et $\ln n! \sim n \ln n$.

Exercice 2. On a $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$, où u_n est la suite de la section 2. Par Stirling,

$$\frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e} (2\pi n)^{1/(2n)} e^{\theta_n/(12n^2)} \rightarrow \frac{1}{e},$$

puisque $\frac{\ln(2\pi n)}{2n} \rightarrow 0$. Enfin $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$, par le lemme 2.6 ou directement par Stirling.

Exercice 3. On écrit $(1 + \frac{1}{n})^n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n}))$ et on développe l'exposant. Avec $x = \frac{1}{n}$,

$$n \ln(1 + x) = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4) \right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^3).$$

Donc

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cdot \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^3)\right) = e \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + O(x^3)\right),$$

où $\frac{x^2}{8}$ vient du carré $\frac{1}{2}(-\frac{x}{2})^2$. Comme $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$, on obtient le résultat. En particulier $e - (1 + \frac{1}{n})^n \sim \frac{e}{2n}$: cette suite converge vers e beaucoup plus lentement que (u_n) .

Exercice 4. On a $g'(x) = f'(x) + \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}(1 - x^n e^{-x}) \geq 0$ sur $[0, 1]$, puisque $0 \leq x^n \leq 1$ et $e^{-x} \leq 1$. Donc $g(1) \geq g(0)$, c'est-à-dire $u_n e^{-1} + \frac{1}{n!} \geq 1$, soit $u_n \geq e - \frac{e}{n!}$. De même, $f' \leq 0$ donne $f(1) \leq f(0)$, soit $u_n \leq e$. Par encadrement, $u_n \rightarrow e$. C'est la méthode de la feuille d'origine ; elle est un peu moins précise que la proposition 4.3.

Exercice 5. L'expression est symétrique en x et y ; on peut supposer $x > y$. On pose $s = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{y} > 0$, de sorte que $x = \sqrt{xy} e^s$ et $y = \sqrt{xy} e^{-s}$. En divisant par $\sqrt{xy}$, l'inégalité à montrer s'écrit

$$1 < \frac{e^s - e^{-s}}{2s} = \frac{\operatorname{sh} s}{s} < \frac{e^s + e^{-s}}{2} = \operatorname{ch} s.$$

La première inégalité vient de $\operatorname{sh} s = \sum_{k \geq 0} \frac{s^{2k+1}}{(2k+1)!} > s$. La seconde équivaut à $\operatorname{th} s < s$, qui découle de $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 < 1$ sur $]0, s]$ et de $\operatorname{th} 0 = 0$.

Exercice 6. On développe r_n en série et on isole les deux premiers termes :

$$r_n = \sum_{k > n} \frac{n!}{k!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \rho_n, \quad 0 < \rho_n = \sum_{k \geq n+3} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{j \geq 3} \frac{1}{(n+1)^j} = \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Donc $\rho_n = O(\frac{1}{n^3})$. Ensuite $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}$, et $\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = O(\frac{1}{n^3})$. Les termes en $\frac{1}{n^2}$ se compensent, et $r_n = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^3})$. Plus précisément, on peut montrer que $r_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + O(\frac{1}{n^4})$.

Ensuite $n!e = n!u_n + r_n$ avec $n!u_n \in \mathbb{N}$. Par périodicité du sinus,

$$\sin(2\pi n!e) = \sin(2\pi r_n) = 2\pi r_n + O(r_n^3) = \frac{2\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Pour $n \geq 3$, on a $0 < r_n < \frac{1}{n}$ par la proposition 4.1, donc $0 < 2\pi r_n < \pi$ et les termes de la série $\sum \sin(2\pi n!e)$ sont positifs. Ils sont équivalents à ceux de la série harmonique $\sum \frac{2\pi}{n}$: la série diverge. En revanche, $\sum (\sin(2\pi n!e) - \frac{2\pi}{n})$ converge absolument.

Références

- [1] X. Gourdon, *Les maths en tête. Analyse*, Ellipses.
- [2] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press.
- [3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press.
- [4] J.-É. Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*, EDP Sciences.

Source. Feuille de problèmes de terminale S (2003), d'après le manuel *Terracher*.