

Méthodes de calcul d'intégrales

Que faire quand on ne connaît pas de primitive ?

Michel Hua

Octobre 2026

Résumé

Pour calculer $\int_a^b f$, le réflexe est de chercher une primitive. Mais la plupart des intégrales intéressantes n'ont pas de primitive simple, ou alors on ne veut pas la valeur exacte, seulement un encadrement. Que faire alors ? Cette fiche part d'une feuille d'exercices de terminale et montre, sur chaque exercice, une méthode qui va bien plus loin que le calcul demandé. On rencontre : la linéarisation et les intégrales de Wallis, qui donnent la constante de la formule de Stirling ; l'intégration par parties et la dérivation par rapport à un paramètre, qui mènent au « rêve du bachelier » $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum n^{-n}$; les relations de récurrence, leur instabilité numérique et l'irrationalité de e ; le noyau de Dirichlet, qui donne $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$; la convexité, qui encadre une intégrale et explique les méthodes des trapèzes et du point milieu ; enfin le reste intégral de la formule de Taylor.

Leçons concernées. 236 (Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables), 239 (Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre), 246 (Séries de Fourier), 235 (Problèmes d'interversion de symboles en analyse), 218 (Formules de Taylor), 230 (Séries de nombres réels ou complexes).

Développements possibles. Intégrales de Wallis et constante de Stirling (théorème 1.3 et proposition 1.5) ; calcul de $\zeta(2)$ par le noyau de Dirichlet (théorème 4.5) ; proposition 2.3 et théorème 2.5 ; erreur des méthodes des trapèzes et du point milieu (proposition 5.2). Le fichier `CalculIntegral.lean` vérifie avec Mathlib les exemples, lemmes, propositions, théorèmes et le corollaire des sections 1, 3, 4 et 6, la proposition 5.1, la proposition 2.1 et le théorème 2.5 ; il ne démontre la proposition 2.3 que pour s entier et $k \leq s$, et ne traite pas la proposition 5.2.

Prérequis. Intégrale d'une fonction continue sur un segment, intégration par parties, changement de variable, séries numériques. Pour les sections 2 et 4 : convergence uniforme, dérivation sous l'intégrale.

Notations. Pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$. Les intégrales sont des intégrales de Riemann de fonctions continues par morceaux sur un segment, ou des intégrales généralisées absolument convergentes.

Table des matières

1	Calculer directement, puis par récurrence : Wallis	2
2	Intégrer par parties, dériver par rapport à un paramètre	4
3	Relations de récurrence	6

4	Le problème de Bâle par le noyau de Dirichlet	7
5	Encadrer sans calculer : convexité et quadrature	9
6	Le reste intégral de la formule de Taylor	11
7	Synthèse	12
8	Exercices	13
9	Corrigés	13

1 Calculer directement, puis par récurrence : Wallis

On commence par les cas où une primitive existe et se trouve sans peine. Même là, il y a une méthode à retenir. Une valeur absolue se traite en coupant l'intervalle aux endroits où son contenu change de signe. Une puissance de sinus se traite en la transformant en somme de cosinus.

Exemple 1.1 (Exercice 1 de la feuille). On veut $\int_0^4 (|x-1| + |x-2|) dx$. Par linéarité, on calcule chaque morceau séparément. On coupe en 1 pour le premier et en 2 pour le second (relation de Chasles). Chaque morceau est l'aire de deux triangles :

$$\int_0^4 |x-1| dx = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5, \quad \int_0^4 |x-2| dx = 2 + 2 = 4.$$

Donc $\int_0^4 (|x-1| + |x-2|) dx = 9$. On peut aussi écrire la fonction sans valeur absolue. Elle vaut $3-2x$ sur $[0, 1]$, 1 sur $[1, 2]$ et $2x-3$ sur $[2, 4]$. Les trois intégrales valent 2, 1 et 6, et l'on retrouve 9 (figure 1).

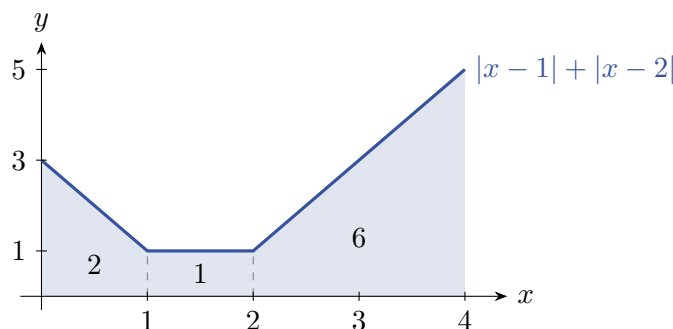


FIG. 1 : La fonction $|x-1| + |x-2|$ est affine par morceaux : l'aire sous la courbe, 9, est la somme des aires 2, 1 et 6 de trois trapèzes.

Pour $\sin^4$, aucune primitive ne saute aux yeux. L'idée est de remplacer la puissance par une somme de cosinus, qu'on sait intégrer : c'est la *linéarisation*.

Exemple 1.2 (Linéarisation). Par les formules d'Euler,

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} (2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6) = \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8}.$$

Les termes $\cos 2x$ et $\cos 4x$ sont d'intégrale nulle sur $[0, \pi]$. Il reste le terme constant :

$$\int_0^\pi \sin^4 x dx = \frac{3\pi}{8}.$$

Ce qu'il faut retenir : tout polynôme trigonométrique s'intègre en le linéarisant, et sur une période seul le terme constant contribue.

La linéarisation devient lourde pour $\sin^{20}$. On change donc de point de vue. Au lieu de calculer une intégrale, on les calcule *toutes à la fois*, en cherchant une relation entre deux d'entre elles. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

Deux changements de variable seront utiles. Avec $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$, on voit que $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$. Avec $x \mapsto \pi - x$, on voit que $\int_0^\pi \sin^n x \, dx = 2W_n$. La figure 2 montre comment les graphes de $\sin^n$ se resserrent vers $x = \frac{\pi}{2}$ quand n grandit : les aires W_n diminuent, mais lentement.

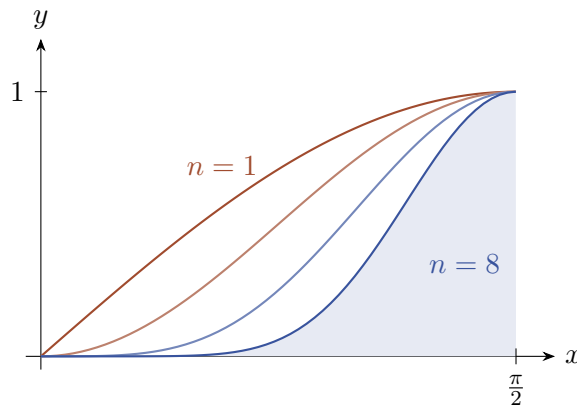


FIG. 2 : Les graphes de $\sin^n$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ pour $n = 1, 2, 4, 8$. L'aire W_n (colorée pour $n = 8$) décroît comme $\sqrt{\pi/(2n)}$.

Le théorème suivant dit trois choses. On sait calculer W_n par récurrence. Le produit nW_nW_{n-1} ne dépend pas de n . Et de là, on tire la taille de W_n quand n est grand.

Théorème 1.3 (Wallis). 1. $W_0 = \frac{\pi}{2}$, $W_1 = 1$ et $W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$ pour $n \geq 2$. Par conséquent

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

3. La suite (W_n) est strictement décroissante et $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

4. (Produit de Wallis) $\frac{\pi}{2} = \lim_{p \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^p \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$.

Idée de la preuve. On intègre par parties en écrivant $\sin^n = \sin^{n-1} \cdot \sin$. La dérivée de $\sin^{n-1}$ fait apparaître $\cos^2 = 1 - \sin^2$, donc à la fois W_{n-2} et W_n . Pour l'équivalent, on encadre W_n entre deux termes voisins de la suite.

Démonstration. 1. Pour $n \geq 2$, on intègre par parties $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$:

$$W_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx = (n-1)(W_{n-2} - W_n).$$

Le crochet est nul aux deux bornes. On obtient $nW_n = (n-1)W_{n-2}$. Les formules closes s'en déduisent par récurrence sur p , en écrivant $\frac{2p-1}{2p} = \frac{(2p-1)(2p)}{(2p)^2}$.

2. La suite $(nW_nW_{n-1})_{n \geq 1}$ est constante. En effet, pour $n \geq 2$, la relation de 1 donne $nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-2}W_{n-1}$. Elle vaut donc son premier terme, $1 \cdot W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $0 < \sin x < 1$, donc $\sin^{n+1} x < \sin^n x$. Les fonctions étant continues, on en déduit $0 < W_{n+1} < W_n$. Ainsi, pour $n \geq 2$,

$$\frac{n-1}{n} = \frac{W_n}{W_{n-2}} \leq \frac{W_n}{W_{n-1}} \leq 1,$$

donc $W_n \sim W_{n-1}$. Avec 2, on obtient $nW_n^2 \sim nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$. Comme $W_n > 0$, cela donne $W_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$.

4. Par 1, on a

$$\frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2p)!(2p+1)!}{2^{4p}(p!)^4} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^p \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}.$$

Pour la dernière égalité, on regroupe $(2p)!(2p+1)! = \prod_{k=1}^p (2k)^2 \cdot \prod_{k=1}^p (2k-1)(2k+1)$ et $2^{2p}(p!)^2 = \prod_{k=1}^p (2k)^2$. Or ce quotient tend vers 1 par 3. $\square$

Exemple 1.4. On retrouve $\int_0^\pi \sin^4 x \, dx = 2W_4 = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$, comme dans l'exemple 1.2, sans avoir rien linéarisé.

Voici une application inattendue. La formule de Stirling dit que $n!$ se comporte comme $C\sqrt{n}(n/e)^n$. Établir la forme $\sqrt{n}(n/e)^n$ se fait par une comparaison série-intégrale ; c'est l'objet de la fiche de la leçon 224 (*Autour du nombre e*). Mais cette méthode ne donne pas la valeur de C . Les intégrales de Wallis la donnent : il suffit de réinjecter l'équivalent dans la formule close de W_{2p} .

Proposition 1.5 (Constante de Stirling). *S'il existe $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$, alors $C = \sqrt{2\pi}$. Autrement dit,*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Démonstration. On remplace $(2p)!$ et $p!$ par leurs équivalents dans la formule close de W_{2p} . Les puissances de e et de p se simplifient :

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{C\sqrt{2p}(2p)^{2p}e^{-2p}}{2^{2p}C^2p^{2p}e^{-2p}} = \frac{\pi}{C\sqrt{2p}}.$$

D'autre part, le théorème 1.3 donne $W_{2p} \sim \sqrt{\pi/(4p)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$. Deux équivalents d'une même suite ont le même coefficient : $\frac{\pi}{C\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, soit $C = \sqrt{2\pi}$. $\square$

Remarque 1.6. On peut lire le même résultat sans parler de Stirling. Comme $W_{2p} = \frac{\pi}{2} 4^{-p} \binom{2p}{p}$, l'équivalent de W_{2p} s'écrit $\binom{2p}{p} \sim \frac{4^p}{\sqrt{\pi p}}$. En probabilités, $\binom{2p}{p} 4^{-p}$ est la probabilité qu'une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ soit revenue en 0 au temps $2p$. Elle décroît donc comme $1/\sqrt{\pi p}$.

2 Intégrer par parties, dériver par rapport à un paramètre

Les intégrales de la forme $\int t^n \ln^k t \, dt$ ont toujours une primitive. Le travail consiste à faire disparaître le logarithme. L'intégration par parties s'en charge : on dérive le logarithme, qui devient $\frac{1}{t}$, et on primitive la puissance.

Proposition 2.1 (Exercice 2 de la feuille). Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ et $x > 0$. On pose $I_n(x) = \int_1^x t^n \ln t \, dt$ et $J_n(x) = \int_1^x t^n \ln^2 t \, dt$. Alors

$$I_n(x) = \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1} - 1}{(n+1)^2}, \quad J_n(x) = \frac{x^{n+1} \ln^2 x}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_n(x).$$

Pour $n = -1$, on a $I_{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$ et $J_{-1}(x) = \frac{1}{3} \ln^3 x$.

Démonstration. On intègre par parties sur le segment d'extrémités 1 et x , qui est inclus dans $]0, +\infty[$. On dérive la puissance du logarithme et on primitive t^n en $\frac{t^{n+1}}{n+1}$:

$$I_n(x) = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \right]_1^x - \frac{1}{n+1} \int_1^x t^n \, dt, \quad J_n(x) = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln^2 t \right]_1^x - \frac{2}{n+1} \int_1^x t^n \ln t \, dt.$$

Pour $n = -1$, il n'y a rien à faire : $\frac{\ln^k t}{t}$ est la dérivée de $\frac{\ln^{k+1} t}{k+1}$. □

Remarque 2.2. En développant, $J_n(x) = \frac{x^{n+1} \ln^2 x}{n+1} - \frac{2x^{n+1} \ln x}{(n+1)^2} + \frac{2(x^{n+1}-1)}{(n+1)^3}$. Chaque intégration par parties abaisse d'une unité la puissance du logarithme. Par récurrence, $\int t^n \ln^k t \, dt$ est donc de la forme $t^{n+1} P_k(\ln t)$, avec P_k un polynôme de degré k .

Faisons tendre x vers 0^+ , pour $n \geq 0$. Comme $x^{n+1} \ln^j x \rightarrow 0$, il reste $\int_0^1 t^n \ln t \, dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$ et $\int_0^1 t^n \ln^2 t \, dt = \frac{2}{(n+1)^3}$. On devine un motif. La proposition suivante le confirme, sans aucune intégration par parties.

L'idée est la suivante. On connaît une intégrale très simple, $\int_0^1 t^s \, dt = \frac{1}{s+1}$, qui dépend d'un paramètre s . Si l'on dérive t^s par rapport à s , on obtient $t^s \ln t$. Dériver k fois sous l'intégrale fait donc apparaître $\ln^k t$. Il reste à justifier qu'on a le droit de dériver sous le signe intégrale.

Proposition 2.3. Pour tout réel $s > -1$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^s \ln^k t \, dt = \frac{(-1)^k k!}{(s+1)^{k+1}}.$$

Démonstration. Soit $F(s) = \int_0^1 t^s \, dt = \frac{1}{s+1}$ pour $s > -1$, et $g(s, t) = t^s = e^{s \ln t}$ sur $] -1, +\infty[\times]0, 1]$. On a $\partial_s^k g(s, t) = t^s \ln^k t$, qui est continue en (s, t) .

Il faut une domination indépendante de s . Fixons $a > -1$. Pour $s \geq a$ et $t \in]0, 1]$,

$$|t^s \ln^k t| \leq t^a |\ln t|^k = t^{\frac{a+1}{2}-1} \cdot t^{\frac{a+1}{2}} |\ln t|^k \leq M_{a,k} t^{\frac{a+1}{2}-1},$$

où $M_{a,k} = \sup_{]0,1]} t^{(a+1)/2} |\ln t|^k$ est fini par croissances comparées. Le majorant est intégrable sur $]0, 1]$ car $\frac{a+1}{2} - 1 > -1$.

Comme tout point de $] -1, +\infty[$ a un voisinage contenu dans un $[a, +\infty[$ avec $a > -1$, le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique. Par récurrence sur k , F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $F^{(k)}(s) = \int_0^1 t^s \ln^k t \, dt$. Or on dérive directement $F(s) = \frac{1}{s+1}$: $F^{(k)}(s) = \frac{(-1)^k k!}{(s+1)^{k+1}}$. □

Remarque 2.4. Le changement de variable $t = e^{-u}$ donne une autre lecture. L'énoncé devient $\int_0^{+\infty} u^k e^{-(s+1)u} \, du = \frac{k!}{(s+1)^{k+1}}$, c'est-à-dire $\Gamma(k+1) = k!$ après un changement d'échelle. Les deux preuves reposent sur la même méthode : dériver par rapport à un paramètre une intégrale qu'on connaît déjà.

On peut maintenant calculer une intégrale qui semble hors de portée : celle de x^{-x} , qui n'a pas de primitive élémentaire. L'idée est de développer $x^{-x} = e^{-x \ln x}$ en série entière de l'exponentielle. Chaque terme est un $x^k \ln^k x$, que la proposition 2.3 sait intégrer. Il faut seulement justifier qu'on peut intégrer la série terme à terme.

Théorème 2.5 (« Rêve du bachelier », Jean Bernoulli 1697).

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

Démonstration. Pour $x \in]0, 1]$, on écrit $x^{-x} = e^{-x \ln x} = \sum_{k \geq 0} u_k(x)$ avec $u_k(x) = \frac{(-x \ln x)^k}{k!}$. On pose $u_k(0) = 1$ si $k = 0$ et $u_k(0) = 0$ sinon. Comme $x \ln x \rightarrow 0$ en 0, chaque u_k est continue sur $[0, 1]$.

Pour intervertir, on cherche une convergence normale. L'étude de $x \mapsto x \ln x$, de dérivée $\ln x + 1$, donne $0 \leq -x \ln x \leq \frac{1}{e}$ sur $[0, 1]$. Donc $\|u_k\|_{\infty} \leq \frac{e^{-k}}{k!}$, terme général d'une série convergente. La série $\sum u_k$ converge normalement, donc uniformément sur le segment $[0, 1]$, et on peut l'intégrer terme à terme. Par la proposition 2.3 avec $s = k$,

$$\int_0^1 u_k(x) dx = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x dx = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}} = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}.$$

On somme sur $k \geq 0$ et on pose $n = k + 1$. Pour $x^x = e^{x \ln x}$, le même calcul fait apparaître un facteur $(-1)^k$ supplémentaire. $\square$

Remarque 2.6. La série converge très vite : $\int_0^1 x^{-x} dx = 1,29128\dots$ et $\int_0^1 x^x dx = 0,78343\dots$. Pourquoi l'interversion marche-t-elle si bien ? Parce que $|x \ln x|$ reste inférieur à $\frac{1}{e}$: la série est dominée par celle de $e^{1/e}$. C'est l'exemple type d'une interversion série-intégrale justifiée par convergence normale sur un segment (leçon 235). Sur un intervalle non borné, il faudrait le théorème de convergence dominée.

3 Relations de récurrence

L'exercice 3 de la feuille demande $\int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)e^{-x} dx$. On pourrait intégrer trois fois par parties. Il est plus économique, et plus instructif, de traiter toutes les puissances à la fois, comme pour Wallis. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

Une intégration par parties relie I_{n+1} à I_n . On en déduit une formule close, puis un encadrement.

Proposition 3.1 (Exercice 3 de la feuille). 1. $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n! \left(1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)$.

3. $0 < I_n \leq \frac{1}{n+1}$; en particulier $I_n \rightarrow 0$.

Démonstration. 1. On dérive x^{n+1} et on primitive e^{-x} :

$$I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n.$$

2. Le facteur $(n+1)$ gêne. On s'en débarrasse en divisant par $(n+1)!$:

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{I_n}{n!} - \frac{1}{e(n+1)!}.$$

La suite $\frac{I_n}{n!}$ perd $\frac{1}{en!}$ à chaque pas. Une sommation télescopique à partir de $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$ donne la formule.

3. L'intégrande est continue, positive et non identiquement nulle, donc $I_n > 0$. Elle est majorée par x^n , d'intégrale $\frac{1}{n+1}$. $\square$

Exemple 3.2. La relation donne de proche en proche $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$, $I_2 = 2 - \frac{5}{e}$, $I_3 = 6 - \frac{16}{e}$. Par linéarité,

$$\int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)e^{-x} dx = -I_3 + 2I_2 - I_1 = -3 + \frac{8}{e} \approx -0,0570.$$

On vérifie le signe : l'intégrande vaut $-x(1-x)^2e^{-x}$, qui est négatif.

L'encadrement 3 a l'air anodin. Il démontre pourtant un résultat célèbre. L'idée : par la formule 2, eI_n est la différence entre $n!e$ et un entier. Or eI_n est strictement compris entre 0 et 1. Donc $n!e$ n'est jamais entier, ce qui est impossible si e est rationnel.

Corollaire 3.3 (Irrationalité de e). *Le nombre e est irrationnel.*

Démonstration. Par la proposition 3.1, $eI_n = n!e - a_n$ avec $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$, et $0 < eI_n \leq \frac{e}{n+1} < 1$ pour $n \geq 2$. Donc $n!e \notin \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 2$. Supposons $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = \max(q, 2)$, l'entier $n!$ est multiple de q , donc $n!e \in \mathbb{Z}$. C'est absurde. $\square$

Remarque 3.4 (Stabilité numérique). On pourrait croire que la relation 1 est un bon moyen de calculer I_n sur ordinateur. C'est faux, et il est utile de comprendre pourquoi.

Partons d'une valeur approchée $\tilde{I}_0 = I_0 + \varepsilon$, par exemple l'arrondi flottant de $1 - 1/e$, avec $|\varepsilon| \approx 10^{-16}$. La récurrence progressive donne $\tilde{I}_n = I_n + n!\varepsilon$: l'erreur est multipliée par $n!$, alors que I_n tend vers 0. Dès $n \approx 18$, on a $n! \cdot 10^{-16} > 1/(n+1)$ et le résultat calculé n'a plus aucun chiffre exact. La formule close 2 souffre du même défaut : elle multiplie par $n!$ la différence de deux nombres très proches, 1 et $\frac{1}{e} \sum_{k \leq n} \frac{1}{k!}$.

Le remède est de parcourir la récurrence à l'envers : $I_n = \frac{I_{n+1} + 1/e}{n+1}$. Cette fois, l'erreur est divisée à chaque pas. Précisément, l'erreur $\delta_n = \tilde{I}_n - I_n$ vérifie $\delta_n = \frac{\delta_{n+1}}{n+1}$, donc $\delta_n = \frac{n!}{N!} \delta_N$. Si l'on part de $\tilde{I}_N = 0$, on a $|\delta_N| = I_N \leq \frac{1}{N+1}$, d'où $|\delta_n| \leq \frac{n!}{(N+1)!}$. Avec $N = n + 20$, on obtient I_n avec une précision relative bien meilleure que 10^{-16} , puisque $I_n \geq \frac{1}{e(n+1)}$ (exercice 4).

4 Le problème de Bâle par le noyau de Dirichlet

L'exercice 4 de la feuille est un petit chef-d'œuvre. Il calcule

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

avec uniquement des intégrations par parties. Voici le plan. On cherche une fonction φ dont les « coefficients » $\int_0^\pi \varphi(x) \cos nx dx$ valent exactement $\frac{1}{n^2}$. Alors, en intégrant φ contre la somme $f_n = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx$, on fait apparaître la somme partielle $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Il restera à montrer que cette intégrale tend vers une limite qu'on sait calculer.

On note $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et, pour $x \in [0, \pi]$, $f_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx$. La première étape est d'écrire f_n sans le signe somme.

Lemme 4.1 (Noyau de Dirichlet). *Pour $x \in]0, \pi]$, $f_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(x/2)}$.*

Idée. On multiplie par $2 \sin \frac{x}{2}$ pour que chaque terme devienne une différence de deux sinus, et la somme se télescope.

Démonstration. On a $2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \sin((k + \frac{1}{2})x) - \sin((k - \frac{1}{2})x)$. En sommant pour $1 \leq k \leq n$, tous les termes intermédiaires se simplifient : $2 \sin \frac{x}{2} f_n(x) = \sin \frac{x}{2} + \sin((n + \frac{1}{2})x) - \sin \frac{x}{2}$. On divise par $2 \sin \frac{x}{2}$, qui est non nul. $\square$

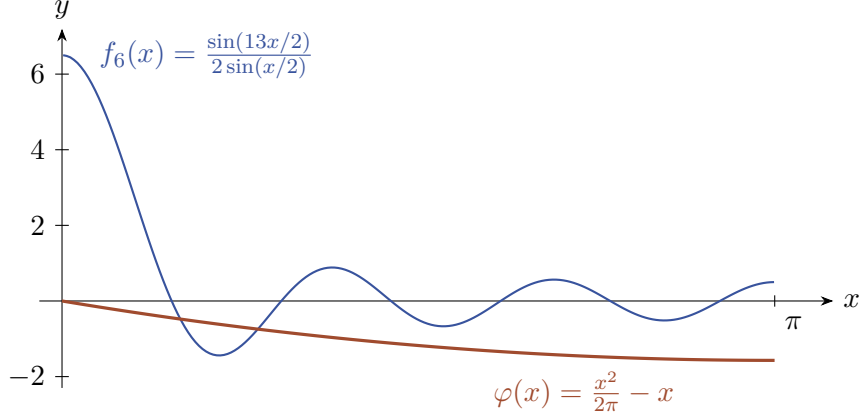


FIG. 3 : Le noyau de Dirichlet f_6 et la fonction φ du lemme 4.2. L'intégrale de leur produit vaut $u_6 - \frac{\pi^2}{6}$.

La figure 3 montre f_n pour $n = 6$. Le noyau a un grand pic en 0, de hauteur $n + \frac{1}{2}$, puis oscille de plus en plus vite quand n grandit. Ce sont ces oscillations qui feront tendre l'intégrale vers sa limite.

On cherche ensuite φ sous la forme d'un polynôme $ax^2 + bx$. Il suffit de connaître $\int_0^\pi x \cos nx \, dx$ et $\int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx$.

Lemme 4.2. Pour $n \geq 1$, $\int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$ et $\int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$. Par conséquent, avec $\varphi(x) = \frac{x^2}{2\pi} - x$,

$$\int_0^\pi \varphi(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{n^2} \quad (n \geq 1), \quad \int_0^\pi \varphi(x) \, dx = -\frac{\pi^2}{3}.$$

Démonstration. On intègre par parties en dérivant la puissance de x :

$$\int_0^\pi x \cos nx \, dx = \left[\frac{x \sin nx}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2}.$$

Pour x^2 , il faut deux intégrations par parties :

$$\int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx = -\frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = -\frac{2}{n} \left(\left[-\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx \right) = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.$$

Alors $\int_0^\pi \varphi(x) \cos nx \, dx = \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$: les termes $(-1)^n$ se compensent, c'est tout l'intérêt du choix de φ . Enfin $\int_0^\pi \varphi = \frac{\pi^3}{6\pi} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}$. $\square$

Remarque 4.3. D'où sortent $a = \frac{1}{2\pi}$ et $b = -1$? Pour $\varphi = ax^2 + bx$, le lemme donne $\int_0^\pi \varphi(x) \cos nx \, dx = \frac{2\pi a(-1)^n + b((-1)^n - 1)}{n^2}$. On veut $\frac{1}{n^2}$ pour tout n . Le cas n pair impose $2\pi a = 1$ et le cas n impair impose $-2\pi a - 2b = 1$. Ce sont donc les seuls choix possibles.

La dernière étape est un résultat d'oscillation. Quand λ est grand, $\sin(\lambda x)$ oscille très vite. Les aires positives et négatives se compensent, et l'intégrale de $h(x) \sin(\lambda x)$ tend vers 0. Pour une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$, une intégration par parties suffit à le voir : elle fait sortir un facteur $\frac{1}{\lambda}$.

Lemme 4.4 (Riemann–Lebesgue, cas $\mathcal{C}^1$). Si $h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_\alpha^\beta h(x) \sin(\lambda x) \, dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Démonstration. Par parties, pour $\lambda > 0$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x) \sin(\lambda x) dx = \left[-\frac{h(x) \cos(\lambda x)}{\lambda} \right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{\lambda} \int_{\alpha}^{\beta} h'(x) \cos(\lambda x) dx.$$

La valeur absolue est majorée par $\frac{1}{\lambda}(|h(\alpha)| + |h(\beta)| + (\beta - \alpha)\|h'\|_{\infty})$, qui tend vers 0. $\square$

Tout est prêt. On assemble les trois lemmes.

Théorème 4.5 (Euler, 1735). *Pour tout $n \geq 1$, $\int_0^{\pi} \varphi(x) f_n(x) dx = u_n - \frac{\pi^2}{6}$. Par conséquent*

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Démonstration. L'égalité. Par linéarité et le lemme 4.2, $\int_0^{\pi} \varphi f_n = \frac{1}{2}(-\frac{\pi^2}{3}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = u_n - \frac{\pi^2}{6}$.

La limite. Par le lemme 4.1, $\int_0^{\pi} \varphi f_n = \int_0^{\pi} h(x) \sin((n + \frac{1}{2})x) dx$, où $h(x) = \frac{\varphi(x)}{2 \sin(x/2)}$ sur $]0, \pi]$. La valeur en 0 ne change pas l'intégrale. Pour appliquer le lemme 4.4, il faut vérifier que h se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Le dénominateur s'annule en 0, mais φ aussi. Écrivons

$$h(x) = \frac{x - 2\pi}{2\pi} \cdot \frac{x/2}{\sin(x/2)}.$$

La fonction $y \mapsto \frac{\sin y}{y}$, prolongée par 1 en 0, est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}^{\infty}$. Elle ne s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Son inverse est donc $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $[0, \pi]$, avec $h(0) = -1$. Le lemme 4.4, avec $\lambda = n + \frac{1}{2}$, donne $\int_0^{\pi} \varphi f_n \rightarrow 0$, c'est-à-dire $u_n \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$. $\square$

Remarque 4.6. Pourquoi cela marche-t-il ? C'est de la théorie de Fourier déguisée (leçon 246). Les coefficients en cosinus du prolongement pair et 2π -périodique de φ sont les nombres $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos kx dx$, et

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi f_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k = S_n \varphi(0)$$

est la somme partielle de Fourier de φ en 0. Le théorème dit simplement que $S_n \varphi(0) \rightarrow \varphi(0) = 0$. On en déduit d'ailleurs, sur $[0, \pi]$,

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi^2}{6} \right).$$

L'intérêt de la méthode est de n'utiliser que des intégrations par parties. Le même argument, avec un polynôme de degré 4, donne $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

5 Encadrer sans calculer : convexité et quadrature

Parfois, on ne cherche pas la valeur exacte, seulement un encadrement. La convexité le donne presque gratuitement. Une fonction convexe est au-dessous de ses cordes et au-dessus de ses tangentes. En intégrant, on obtient des aires de trapèzes et de triangles, faciles à calculer.

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ sur $[0, 1]$, et $A = (0, 1)$, $B = (1, \frac{1}{3})$ les points de sa courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses 0 et 1. La figure 4 montre la situation : la courbe est coincée entre la corde (AB) , au-dessus, et la ligne brisée formée par les deux tangentes, au-dessous.

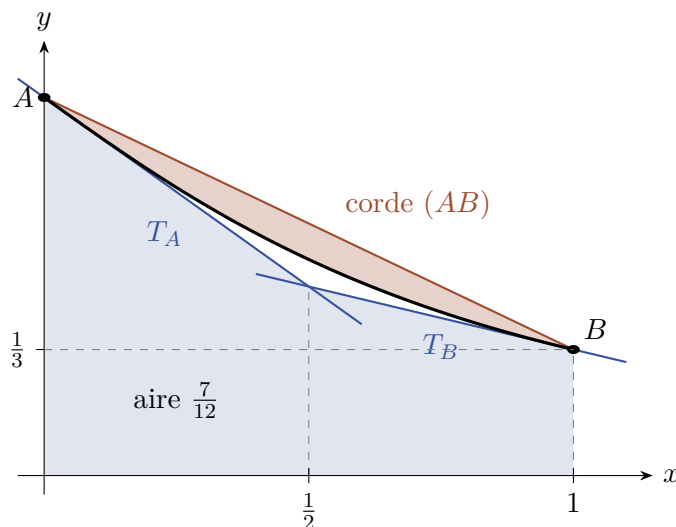


FIG. 4 : La courbe de $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ entre sa corde et ses deux tangentes extrêmes. L'aire bleue, sous les tangentes, vaut $\frac{7}{12}$; l'aire sous la corde vaut $\frac{8}{12}$. L'intégrale de f est comprise entre les deux : il lui manque la bande rose.

Proposition 5.1 (Exercice 5 de la feuille). 1. f est strictement décroissante et convexe sur

$$[0, 1], \text{ avec } f''(x) = \frac{6x(1+x)}{(1+x+x^2)^3}.$$

2. La corde (AB) a pour équation $y = 1 - \frac{2}{3}x$. Les tangentes en A et en B sont $T_A: y = 1 - x$ et $T_B: y = \frac{2-x}{3}$, et se coupent en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

3. On a $\frac{7}{12} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{8}{12}$, et en fait $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,6046$.

Démonstration. 1. Avec $q(x) = 1 + x + x^2$, on a $f' = -(2x+1)q^{-2} < 0$ sur $[0, 1]$, puis

$$f'' = -2q^{-2} + 2(2x+1)^2q^{-3} = \frac{2(4x^2 + 4x + 1) - 2(1+x+x^2)}{q^3} = \frac{6x^2 + 6x}{q^3} \geq 0.$$

2. On a $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{3}$, $f'(0) = -1$ et $f'(1) = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$. Les tangentes se coupent là où $1 - x = \frac{2-x}{3}$, c'est-à-dire $3 - 3x = 2 - x$, soit $x = \frac{1}{2}$.

3. Par convexité, sur $[0, 1]$,

$$m(x) := \max\left(1 - x, \frac{2-x}{3}\right) \leq f(x) \leq 1 - \frac{2}{3}x.$$

L'intégrale de la corde est l'aire d'un trapèze : $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$. Celle de m se calcule en coupant en $\frac{1}{2}$:

$$\int_0^{1/2} (1-x) dx + \int_{1/2}^1 \frac{2-x}{3} dx = \frac{3}{8} + \frac{5}{24} = \frac{7}{12}.$$

Les inégalités sont strictes. En effet, les fonctions continues $f - m \geq 0$ et $1 - \frac{2}{3}x - f \geq 0$ ne sont pas identiquement nulles : en $x = \frac{1}{2}$, on a $m = \frac{1}{2} < f = \frac{4}{7} < \frac{2}{3}$.

Pour la valeur exacte, on met le dénominateur sous forme canonique, $1+x+x^2 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, ce qui fait apparaître une arctangente :

$$\int_0^1 f = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \quad \square$$

La majoration par la corde porte un nom : c'est la méthode des trapèzes. La minoration par la tangente au milieu de l'intervalle est la méthode du point milieu. On peut aller plus loin que l'encadrement et calculer leur erreur exactement. L'idée est d'écrire l'erreur comme l'intégrale de f'' contre un « noyau » positif. Le signe de l'erreur est alors celui de f'' , et sa taille se lit sur l'intégrale du noyau.

Proposition 5.2 (Erreur des trapèzes et du point milieu). *Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$, $m = \frac{a+b}{2}$ et $h = b - a$. Alors*

$$\int_a^b f - h \frac{f(a) + f(b)}{2} = - \int_a^b \frac{(x-a)(b-x)}{2} f''(x) dx, \quad \int_a^b f - h f(m) = \int_a^b K(x) f''(x) dx,$$

où $K(x) = \frac{(x-a)^2}{2}$ sur $[a, m]$ et $K(x) = \frac{(b-x)^2}{2}$ sur $[m, b]$. Il existe donc $\xi, \eta \in [a, b]$ tels que

$$\int_a^b f - h \frac{f(a) + f(b)}{2} = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \int_a^b f - h f(m) = \frac{h^3}{24} f''(\eta).$$

En particulier, si f est convexe, $h f(m) \leq \int_a^b f \leq h \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Démonstration. Trapèzes. Soit $w(x) = \frac{(x-a)(b-x)}{2}$. On a $w(a) = w(b) = 0$, $w'(x) = \frac{a+b-2x}{2}$ et $w'' = -1$. Deux intégrations par parties font passer les deux dérivées de f sur w :

$$\int_a^b w f'' = - \int_a^b w' f' = -[w' f]_a^b + \int_a^b w'' f = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) - \int_a^b f.$$

Point milieu. La formule de Taylor avec reste intégral en m s'écrit $f(x) = f(m) + f'(m)(x-m) + \int_m^x (x-t) f''(t) dt$. On intègre sur $[a, b]$. Le terme linéaire disparaît par symétrie. On échange les intégrales (Fubini) sur les triangles $\{m \leq t \leq x \leq b\}$ et $\{a \leq x \leq t \leq m\}$:

$$\begin{aligned} \int_m^b \int_m^x (x-t) f''(t) dt dx &= \int_m^b f''(t) \frac{(b-t)^2}{2} dt, \\ \int_a^m \int_x^m (t-x) f''(t) dt dx &= \int_a^m f''(t) \frac{(t-a)^2}{2} dt. \end{aligned}$$

Formule de la moyenne. Les noyaux w et K sont positifs, d'intégrales $\frac{h^3}{12}$ et $2 \cdot \frac{(h/2)^3}{6} = \frac{h^3}{24}$. La formule de la moyenne donne ξ et η . $\square$

Remarque 5.3. Pour $f = \frac{1}{1+x+x^2}$, le point milieu donne $f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{7} \approx 0,571$. C'est moins bon que $\frac{7}{12} \approx 0,583$: ici, les deux tangentes aux extrémités font mieux que la tangente au milieu. Les termes d'erreur disent autre chose d'utile. Le point milieu est environ deux fois plus précis que les trapèzes, et son erreur est de signe opposé. La combinaison $\frac{1}{3}T + \frac{2}{3}M$ annule donc le terme principal : c'est la méthode de Simpson, exacte pour les polynômes de degré 3. Enfin, en découpant $[a, b]$ en N sous-intervalles, l'erreur des deux méthodes est en $O(N^{-2})$.

6 Le reste intégral de la formule de Taylor

Le dernier exercice de la feuille définit une suite d'intégrales sans dire d'où elle vient. Elle vient de la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée à l'exponentielle. Ce reste est une intégrale, et la section précédente nous a appris à encadrer une intégrale : on encadre e^x entre 1 et e .

On pose $R_0 = \int_0^1 e^x dx$ et, pour $n \geq 1$, $R_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.

Proposition 6.1 (Exercice 6 de la feuille). 1. $\int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

3. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{(n+1)!} < R_n < \frac{e}{(n+1)!}$. En particulier $R_n \rightarrow 0$ et $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Démonstration. 1. Une primitive de $(1-x)^n$ est $-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$.

2. C'est la formule de Taylor avec reste intégral pour $\exp$, entre 0 et 1, à l'ordre n :

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx.$$

On peut aussi l'établir directement. On a $R_0 = e - 1$ et, par parties, $R_n = \left[\frac{(1-x)^n}{n!} e^x \right]_0^1 + R_{n-1} = R_{n-1} - \frac{1}{n!}$.

3. Pour $x \in]0, 1[$, on a $1 < e^x < e$ et $(1-x)^n > 0$. On intègre ces inégalités strictes entre fonctions continues, et on utilise 1. $\square$

Remarque 6.2. Le changement de variable $u = 1 - x$ donne $R_n = \frac{e}{n!} \int_0^1 u^n e^{-u} du = \frac{e I_n}{n!}$. Les propositions 3.1 et 6.1 disent donc la même chose sous deux formes. L'encadrement 3, multiplié par $n!$, est exactement celui qui sert dans la preuve du corollaire 3.3. La vitesse de convergence de $\sum \frac{1}{k!}$ vers e est étudiée plus finement dans la fiche de la leçon 224.

7 Synthèse

Revenons à la question de départ : que faire quand on ne connaît pas de primitive ? Chaque exercice de la feuille illustre une réponse.

Méthode	Idée	Exemple de la fiche
Linéarisation	transformer un produit en somme	$\int_0^\pi \sin^4 = \frac{3\pi}{8}$
Récurrence	relier les intégrales entre elles, puis les estimer	Wallis, Stirling, $e \notin \mathbb{Q}$
Paramètre	dériver une intégrale connue	$\int_0^1 t^s \ln^k t, \int_0^1 x^{-x}$
Série	développer l'intégrande et intervertir	$\int_0^1 x^{-x} = \sum n^{-n}$
Oscillation	coefficients de Fourier, Riemann–Lebesgue	$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$
Convexité	encadrer par cordes et tangentes	$\frac{7}{12} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} < \frac{8}{12}$
Taylor	lire un reste comme une intégrale	$0 < e - \sum_{k \leq n} \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!}$

Le fil commun est le suivant. On ne calcule presque jamais une intégrale isolée. On la plonge dans une famille (indexée par un entier ou par un réel), et c'est la structure de la famille, récurrence ou dérivée, qui donne la valeur. Quand la valeur exacte est hors d'atteinte, la même structure donne au moins un encadrement, et souvent un résultat qui dépasse de loin l'exercice : la constante de Stirling, l'irrationalité de e , ou $\zeta(2)$.

8 Exercices

Exercice 1. Calculer $\int_0^\pi \sin^6 x \, dx$ et $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x \, dx$.

Exercice 2. Calculer $\int_1^e t^2 \ln^2 t \, dt$ et $\int_0^1 t^2 \ln^2 t \, dt$.

Exercice 3. Calculer $\int_0^1 x^x \, dx$ à 10^{-3} près.

Exercice 4. Avec les notations de la proposition 3.1, montrer que $I_n \sim \frac{1}{e n}$.

Exercice 5. Dédurre du théorème 4.5 les valeurs de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Exercice 6. En appliquant à $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1, 2]$ la méthode de la proposition 5.1 (corde, tangentes aux extrémités) et la proposition 5.2, encadrer $\ln 2$.

Exercice 7. Combien de termes de la série $\sum \frac{1}{k!}$ suffit-il de sommer pour obtenir e à 10^{-10} près ?

9 Corrigés

Exercice 1. On utilise la récurrence de Wallis : $\int_0^\pi \sin^6 = 2W_6 = 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{16}$. Pour la seconde, on écrit $\sin^2 = 1 - \cos^2$ et on utilise $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x \, dx = W_4 - W_6 = \frac{3\pi}{16} - \frac{5\pi}{32} = \frac{\pi}{32}.$$

Exercice 2. On applique la proposition 2.1 avec $n = 2$ et $x = e$, en se souvenant que $\ln e = 1$: $I_2(e) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$, puis

$$J_2(e) = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2e^3+1}{9} = \frac{5e^3-2}{27}.$$

Pour la seconde, la proposition 2.3 avec $s = k = 2$ donne directement $\int_0^1 t^2 \ln^2 t \, dt = \frac{2}{27}$.

Exercice 3. Par le théorème 2.5, $\int_0^1 x^x \, dx = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$. C'est une série alternée, et la suite (n^{-n}) décroît vers 0. Par le critère des séries alternées, le reste après le terme $n = 4$ est majoré par le terme suivant, $5^{-5} = \frac{1}{3125} < 3,3 \cdot 10^{-4}$. Donc

$$\int_0^1 x^x \, dx \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} \approx 0,7831$$

à $3,3 \cdot 10^{-4}$ près, soit 0,783 à 10^{-3} près. La valeur exacte est 0,78343...

Exercice 4. La relation de récurrence s'écrit $(n+1)I_n = I_{n+1} + \frac{1}{e}$. Comme $0 < I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$, le terme I_{n+1} tend vers 0, donc $(n+1)I_n \rightarrow \frac{1}{e}$. Ainsi $I_n \sim \frac{1}{e(n+1)} \sim \frac{1}{en}$. Au passage, $(n+1)I_n > \frac{1}{e}$ donne $I_n \geq \frac{1}{e(n+1)}$, ce qui justifie l'estimation d'erreur relative de la remarque sur la stabilité.

Exercice 5. Les deux séries convergent absolument, ce qui autorise les regroupements. Les termes pairs donnent $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2)$. Il reste pour les termes impairs

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Pour la série alternée, on retranche les termes pairs aux termes impairs : $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{3}{4}\zeta(2) - \frac{1}{4}\zeta(2) = \frac{1}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 6. La fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ est convexe sur $[1, 2]$, car $f''(t) = \frac{2}{t^3} > 0$. La corde donne $\ln 2 < \frac{3}{4}$. Les tangentes en 1 et en 2 sont $y = 2 - t$ et $y = 1 - \frac{t}{4}$; elles se coupent en $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$. On obtient

$$\ln 2 > \int_1^{4/3} (2-t) dt + \int_{4/3}^2 \left(1 - \frac{t}{4}\right) dt = \frac{5}{18} + \frac{7}{18} = \frac{2}{3}.$$

Le point milieu donne ici la même minoration, $f(\frac{3}{2}) = \frac{2}{3}$. Ainsi $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{3}{4}$. On fait mieux avec les termes d'erreur. Comme $\frac{1}{4} \leq f'' \leq 2$ sur $[1, 2]$, la proposition 5.2 donne $\ln 2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{24}f''(\eta) \geq \frac{1}{96}$ et $\frac{3}{4} - \ln 2 = \frac{1}{12}f''(\xi) \geq \frac{1}{48}$. D'où

$$0,677 < \frac{2}{3} + \frac{1}{96} \leq \ln 2 \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{48} < 0,730,$$

en accord avec $\ln 2 = 0,6931 \dots$

Exercice 7. Par la proposition 6.1, l'erreur commise en sommant jusqu'à $k = n$ est R_n , qui est compris entre $\frac{1}{(n+1)!}$ et $\frac{e}{(n+1)!}$. On a $\frac{e}{14!} \approx 3,1 \cdot 10^{-11} < 10^{-10}$, donc sommer jusqu'à $k = 13$ suffit. En revanche $\frac{1}{13!} \approx 1,6 \cdot 10^{-10} > 10^{-10}$, donc s'arrêter à $k = 12$ ne suffit pas. Il faut donc sommer jusqu'à $k = 13$, soit 14 termes.

Références

- [1] X. Gourdon, *Les maths en tête. Analyse*, Ellipses.
- [2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS. Analyse 1 et 2*, Cassini.
- [3] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences.
- [4] J.-E. Rombaldi, *Éléments d'analyse réelle*, EDP Sciences.
- [5] W. Dunham, *Euler : The Master of Us All*, MAA.

Source. Feuille d'exercices de terminale S (2003), d'après *Method'S*.